

LOGIKA MATEMATIKA

a. Pernyataan dalam Matematika

Pendefinisian secara detail suatu pernyataan dalam matematika ternyata tidaklah mudah. Kita dapat saja terjebak ke dalam filosofi yang dalam. Sehingga dalam kegiatan belajar ini, penulis berusaha mengupayakan pendekatan praktis dalam mendefinisikan dan memberi contoh suatu pernyataan.

Definisi 1 Suatu pernyataan adalah suatu kalimat yang jelas nilai kebenarannya. Bisa bernilai salah saja. Bisa bernilai benar saja. Namun tidak bernilai keduanya.

Sebagai contoh, perhatikan kalimat-kalimat berikut.

- 1) Bentuk " $1 + 2 = 4$ " merupakan suatu pernyataan karena bernilai salah.
- 2) Kalimat "Semua kucing berwarna abu-abu" juga merupakan suatu pernyataan karena jelas bernilai salah, sebab ada beberapa kucing yang berwarna hitam.
- 3) Bandung adalah ibukota provinsi Jawa Tengah. Kalimat ini merupakan contoh pernyataan yang salah.
- 4) DKI Jakarta adalah ibukota negara Indonesia. Kalimat ini merupakan contoh pernyataan yang benar.

Kalimat yang bukan merupakan pernyataan adalah ungkapan atau kalimat yang tidak bernilai benar atau tidak bernilai salah. Contohnya "Silakan duduk!", "Apakah kamu sudah makan?", "Jangan memotong pembicaraan orang lain".

Bagaimana dengan notasi atau simbol untuk pernyataan? Dalam logika matematika, pernyataan dinotasikan (dilambangkan) dengan huruf alfabet kecil.

Contoh:

- 1) p : Paris ibukota negara Swiss.
- 2) q : Bilangan 6 adalah bilangan genap.

Selanjutnya bagaimanakah menentukan kebenaran suatu pernyataan?

- Dasar Secara Empiris, yaitu menentukan nilai kebenaran dengan mengadakan pengamatan terlebih dahulu (berdasarkan kenyataan pada saat itu). Jadi, nilai kebenaran ini bersifat relatif. Contoh: Ara berbaju putih. Alin berkulit putih bersih.
- Dasar Secara Tak Empiris (Pernyataan Absolut/Mutlak), yaitu menentukan nilai kebenaran bilamana nilai kebenaran itu mutlak tidak tergantung pada situasi dan kondisi atau waktu dan tempat. Contoh : Bilangan 2 adalah bilangan prima. Ibukota negara Inggris adalah London.

Catatan: Sebagai simbol dari benar biasa dipakai B (benar), R (*right*), T (*true*) atau 1, sedangkan simbol salah digunakan S (salah), W (*wrong*), F (*false*) atau 0. Penggunaan notasi nilai kebenaran ini harus berpasangan, yaitu B-S, atau R-W, atau T-F, atau 1-0.

Secara garis besar, pernyataan dibagi menjadi dua jenis, yaitu pernyataan tunggal dan pernyataan majemuk.

► **Definisi 2** Pernyataan tunggal adalah pernyataan yang hanya memuat satu pokok persoalan atau satu ide.

► **Notasi.** Pernyataan tunggal pada umumnya dinyatakan dengan huruf- huruf kecil seperti p , q , dan r .

► **Contoh.** p : 13 adalah bilangan prima.

q : Malang adalah kota kedua terbesar di provinsi Jawa Timur.

Beberapa kalimat tunggal, p , q , dapat digabung dengan menggunakan kata penghubung sehingga membentuk pernyataan baru seperti p dan q ; p atau q ; p yang q , dan sebagainya. Pernyataan baru ini disebut **pernyataan majemuk**.

Kata-kata penghubung kedua pernyataan biasa disebut konektor atau perakit.

Ditinjau dari segi definisi kalimat, sebenarnya pernyataan merupakan kalimat matematika yang tertutup. Perhatikan perbedaan antara kalimat terbuka dan tertutup berikut.

- 1) Kalimat tertutup adalah kalimat yang dapat ditentukan nilai kebenarannya. Nilai kebenaran yang dimaksudkan adalah nilai benar saja atau nilai salah saja, tetapi tidak keduanya. Yang dimaksud benar atau salah adalah sesuai dengan keadaan yang sesungguhnya. **Kalimat tertutup dapat disebut juga sebagai pernyataan.**
- 2) Kalimat terbuka adalah kalimat matematika yang tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya (tidak dapat ditentukan benar atau salahnya) sampai dilakukan penyelesaian tertentu. Kalimat terbuka biasanya mengandung unsur atau simbol yang nilainya tidak diketahui. Unsur atau simbol yang nilainya tidak diketahui ini biasa disebut dengan variabel atau peubah dan sering dilambangkan dengan huruf kecil seperti x , y , z , a , b , c , dan sebagainya. Kalimat terbuka dapat diubah menjadi kalimat tertutup jika variabelnya diganti dengan nilai tertentu. Contohnya adalah $3x + 4 = 10$ serta akar kuadrat dari y adalah 9.

Selanjutnya kita akan membahas mengenai negasi suatu pernyataan.

► **Definisi 3** Negasi dari pernyataan p adalah suatu pernyataan yang bernilai salah jika p benar dan bernilai benar jika p salah.

► **Notasi** Negasi dari p biasa dinotasikan dengan $\sim p$ atau $\neg p$ (dibaca “negasi p ”, “tidak p ”,

“bukan p “, atau “ingkaran p ”.

- ▶ **Contoh.** Negasi dari pernyataan ”Bilangan prima genap satu-satunya adalah 2” adalah ”Bilangan 2 adalah bukan satu-satunya bilangan prima genap”.

Catatan:

- ▶ Kata sifat tidak bisa dijadikan sebagai unsur tak terdefinisi (*undefined term*).
- ▶ Jika kata-kata seperti ini dibuat untuk membuat pernyataan, maka harus didefinisikan terlebih dahulu.
- ▶ Misalnya pada kalimat “Ani anak yang pandai”, selain butuh observasi juga harus didefinisikan terlebih dahulu tentang kriteria “pandai”, sehingga tidak menimbulkan penafsiran berbeda.
- ▶ Jika pernyataan dan negasinya tidak bisa dinilai benar atau salah, maka kalimat tersebut dikatakan kalimat tak bermakna. Misalnya, kalimat “Kakak habis dibagi adik” mempunyai negasi “Kakak tidak habis dibagi adik”.

Sebagai pembahasan terakhir dalam sub materi ini, kita akan belajar mengenai tabel kebenaran (*truth table*). Tabel kebenaran sangat bermanfaat saat mempelajari logika matematika walaupun para matematikawan tidak sering menggunakannya dalam keseharian namun tabel kebenaran bisa untuk membantu mengecek kebenaran bagi para pemula. Ide awalnya adalah dengan merangkum semua kemungkinan nilai kebenaran dalam satu tabel.

Dua pernyataan dikatakan ekuivalen jika keduanya mempunyai hasil tabel kebenaran yang sama. Berikut merupakan tabel kebenaran untuk negasi.

A	Bukan A ($\sim A$)
Benar (B)	Salah (S)
Salah (S)	Benar (S)

b. Konjungsi dan Disjungsi serta Negasinya

Setelah kita mengenal pernyataan, kini saatnya kita mempelajari hubungan antarpernyataan melalui suatu atau beberapa perakit. Berikut perakit yang masih sederhana.

1) Perakit Konjungsi

Konjungsi dari pernyataan p dan q (ditulis $p \wedge q$, dibaca “ p dan q ”) adalah pernyataan majemuk yang bernilai benar hanya apabila masing-masing p , maupun q bernilai benar, sedangkan untuk keadaan lain maka dia bernilai salah. Perakit konjungsi disebut juga **perakit penyertaan**, karena harus menyertakan semua komponen-komponennya dan

bernilai benar hanya jika semua komponennya benar. Dalam kehidupan sehari-hari banyak kata hubung lain yang mempunyai arti yang sama dengan “dan” yaitu : “**yang, tetapi, meskipun, maupun, sedangkan, padahal, sambil, juga**” dan sebagainya.

2) Perakit Disjungsi

Disjungsi dari pernyataan p dan q (ditulis $p \vee q$, dibaca “ p atau q ”) adalah pernyataan majemuk yang bernilai salah hanya apabila masing-masing p dan q salah, sedangkan untuk keadaan lain ia bernilai benar. Disjungsi disebut juga **alternatif**, karena cukup salah satu saja komponennya benar maka disjungsinya benar. Disjungsi yang didefinisikan seperti demikian disebut disjungsi inklusif (lemah/*weak*). Disjungsi ini yang banyak dibicarakan dalam matematika dan jika dikatakan p atau q maka yang dimaksud adalah disjungsi inklusif ini.

Sedangkan untuk negasi dari konjungsi dan disjungsi mengikuti Hukum De’Morgan, yakni:

- Negasi dari $p \wedge q$, ditulis $\sim (p \wedge q)$, adalah $\sim p \vee \sim q$
- Negasi dari $p \vee q$, ditulis $\sim (p \vee q)$, adalah $\sim p \wedge \sim q$

1. Komponen-komponen, Tabel Kebenaran, dan Negasi dari Bentuk Implikasi

Kita telah mempelajari dua perakit/penghubung antardua pernyataan. Dalam Kegiatan Belajar 4 ini kita akan mempelajari perakit lain yang berhubungan dengan pernyataan bersyarat, yakni bentuk implikasi.

- ▶ **Definisi 4** Implikasi adalah pernyataan yang bernilai salah hanya apabila hipotesisnya benar, tetapi diikuti oleh konklusi yang salah. Untuk keadaan lain implikasinya benar.
- ▶ **Notasi.** Secara matematis kalimat dalam bentuk “Jika p , maka q ” yang dinotasikan dengan $p \rightarrow q$ disebut implikasi.
- ▶ Pada pernyataan $p \rightarrow q$:
 1. p disebut anteseden/ hipotesis,
 2. q disebut konsekuen/ konklusi/ kesimpulan.

Adakah cara membaca yang lain untuk bentuk $p \rightarrow q$? Jawabannya: ada. Berikut cara membacanya.

- 1) jika p , maka q ;
- 2) setiap kali p , (maka) q ;
- 3) p hanya jika q ;
- 4) p syarat cukup (*sufficient*) untuk q ;
- 5) q syarat perlu (*necessary*) untuk p ;

6) q asal saja p ;

Setelah mengetahui cara membaca bentuk implikasi di atas, tentunya kita perlu memahami apa itu syarat cukup dan syarat perlu. Berikut diberikan penjelasannya.

► Pernyataan p dikatakan **syarat cukup** bagi q apabila q selalu muncul setiap kali p muncul.

► Pernyataan q dikatakan sebagai **syarat perlu** untuk p apabila p muncul hanya jika q muncul, jika q tidak muncul maka p juga tidak bisa muncul.

Untuk mengilustrasikan dan membedakan syarat cukup dan syarat perlu, diberikan contoh berikut. Pernyataan berbentuk implikasinya adalah **“Jika suatu bilangan prima, maka bilangan itu bulat”**.

Bilangan prima adalah syarat cukup untuk bilangan bulat. Pernyataan bahwa bilangan itu prima sudah cukup untuk menyatakan bilangan tersebut bulat. Artinya juga, jika kita ingin bilangan bulat cukup kita mengambil bilangan prima, karena bilangan prima pasti bulat.

Sebaliknya, jika kita mengambil bilangan yang tidak bulat maka tidak mungkin kita memperoleh bilangan prima. Akan tetapi untuk memperoleh bilangan bulat tidak perlu (tidak harus) mengambil bilangan prima (4 dan 1 juga merupakan bilangan bulat). Supaya suatu bilangan itu prima, tidak cukup hanya dikatakan bulat (4, 8, bulat tetapi tidak prima). **Jadi, kita juga peroleh kenyataan bahwa syarat cukup belum tentu perlu dan syarat perlu belum tentu cukup.**

Selanjutnya kita akan mempelajari jenis-jenis implikasi.

1. **Implikasi Logis:** konsekuen secara logis dapat disimpulkan dari hipotesis.

Contoh: Jika semua bilangan bulat adalah rasional, maka 5 adalah bilangan rasional.

2. **Implikasi Definisional:** konsekuen pada implikasi ini dapat disimpulkan dari hipotesis, yaitu mengacu pada suatu definisi yang berlaku.

Contoh: Jika bangun geometri ABCD adalah persegi, maka sisi-sisi yang sehadap adalah sejajar dan sama panjang.

3. **Implikasi Empirik atau Kausal:** implikasi yang diketahui berdasarkan pengamatan empiris.

Contoh: Kalau panas air mencapai 100°C , maka air mendidih. Konsekuen “air mendidih” hanya dapat diketahui melalui pengamatan empirik.

4. **Implikasi Intensional atau Desisional**

Contoh: Misalnya seorang anak (siswa SMA) berkata kepada orang tuanya: “Kalau ayah tidak bisa mengantar saya ke sekolah, maka saya akan mencoba berusaha mandiri dengan

berangkat ke sekolah dengan bersepeda”. Konsekuen “saya akan mencoba berusaha mandiri dengan berangkat ke sekolah dengan bersepeda” merupakan keputusan (*decision*) sang anak.

Bagaimana dengan pernyataan yang ekuivalen dengan bentuk $p \rightarrow q$? Cek bahwa $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$. Dengan demikian, negasi dari $p \rightarrow q$ adalah $p \wedge \sim q$.

2. Konsep Konvers, Invers, Kontraposisi, dan Biimplikasi dari Suatu Bentuk Implikasi, serta Konsep Tautologi dan Kontradiksi

Dari implikasi $p \rightarrow q$, kita dapat membentuk berbagai pernyataan-pernyataan yaitu:

- (i) $\sim p \rightarrow \sim q$ yang disebut **invers**,
- (ii) $q \rightarrow p$ disebut **konvers**,
- (iii) $\sim q \rightarrow \sim p$ disebut **kontra posisi/kontra positif** dari implikasi tadi.

Selain tiga bentuk di atas, ada satu bentuk lagi dari implikasi yang berlaku dua arah. Bentuk tersebut dinamakan **biimplikasi**. Berikut penjelasannya.

Biimplikasi dari pernyataan p dan q (dinotasikan dengan $p \leftrightarrow q$ dan dibaca “ p jika dan hanya jika (jhj) q ” atau “ p bila dan hanya bila (bhb) q ”) adalah pernyataan yang bernilai benar jika komponen-komponennya bernilai sama, serta bernilai salah jika komponen-komponennya bernilai tidak sama.

Bagaimana cara membaca bentuk $p \leftrightarrow q$ selain dari penjelasan di atas? Biimplikasi $p \leftrightarrow q$, selain dibaca “ p jika dan hanya jika q ”, dapat juga dibaca dengan:

1. Jika p maka q dan jika q maka p ,
2. p syarat perlu dan cukup bagi q , dan
3. q syarat perlu dan cukup bagi p .

Definisi biimplikasi memungkinkan kita untuk memperoleh dua implikasi dari arah yang berbeda. Bagaimanakah penerapannya dalam bidang matematika itu sendiri? Berikut ini adalah salah satu contohnya.

- Biimplikasi banyak dipergunakan dalam mendefinisikan sesuatu, misalnya: “Persegipanjang disebut persegi jika dan hanya jika masing-masing sudutnya 90° dan keempat sisinya sama panjang”.
- Di sini terkandung pengertian bahwa jika suatu persegipanjang adalah persegi, maka keempat sudutnya masing-masing 90° dan keempat sisinya sama panjang.
- Sebaliknya jika suatu persegipanjang masing-masing sudutnya 90° dan keempat sisinya sama panjang, maka persegipanjang itu disebut persegi.

Selanjutnya tentu muncul pertanyaan ”Bagaimana bentuk negasi dari biimplikasi?”

Negasi bimplikasi $p \leftrightarrow q$ adalah $\sim p \leftrightarrow q$, di mana $\sim p \leftrightarrow q$ **ekivalen dengan** $p \leftrightarrow \sim q$ dan $[(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]$.

Setelah kita mendapatkan hasil dari suatu tabel kebenaran, terkadang kita menemui hasil yang keseluruhannya bernilai benar saja, atau bernilai saja. Dari fenomena tersebut, akhirnya diperkenalkanlah istilah **tautologi** dan **kontradiksi**. Untuk latar belakangnya dapat Anda baca dari uraian berikut.

- ▶ Beberapa pernyataan dapat digabung untuk membentuk pernyataan majemuk.
- ▶ Pernyataan-pernyataan tunggal p_1, p_2, \dots, p_n dapat membentuk suatu pernyataan majemuk yang dihubungkan oleh berbagai perakit.
- ▶ Dilihat dari nilai kebenarannya, ada dua jenis kalimat majemuk yang istimewa, yaitu kalimat majemuk yang selalu bernilai benar dan kalimat majemuk yang selalu bernilai salah, terlepas dari nilai kebenaran masing-masing komponennya.
- ▶ Tautologi adalah pernyataan majemuk yang selalu bernilai benar (dalam segala hal) tanpa memandang nilai kebenaran komponen-komponennya.
- ▶ Kontradiksi adalah pernyataan majemuk yang selalu bernilai salah (dalam segala hal) tanpa bergantung nilai kebenaran dari komponennya.

3. Kuantor Universal dan Eksistensial serta Negasinya

Sebelum mempelajari kuantor, ada baiknya kita belajar terlebih dahulu mengenai tetapan dan peubah. Dalam matematika, notasi yang melambangkan unsur dibedakan atas dua macam yaitu yang mewakili unsur yang bersifat **tetap** dan unsur yang **berubah**. Berikut diberikan definisi tetapan beserta contohnya.

- ▶ **Definisi 5 Tetapan** atau **konstanta** adalah lambang yang mewakili suatu unsur tertentu yang bersifat khusus atau bersifat tetap dalam suatu semesta pembicaraan.
- ▶ **Definisi 6.** Semesta pembicaraan adalah kumpulan yang menjadi sumber atau asal unsur-unsur yang dibicarakan.
- ▶ **Contoh.** Dalam pernyataan-pernyataan berikut, simbol yang digaris bawahhi adalah suatu tetapan.
 - (i) 2 adalah bilangan asli.
 - (ii) Ani berbaju merah.
 - (iii) Bentuk persamaan linier satu variabel adalah $y = \underline{a}x + \underline{b}$

Sedangkan untuk peubah atau variabel dijelaskan dalam bagian berikut.

- ▶ **Definisi 7.** Peubah atau variabel adalah lambang yang masih mewakili suatu unsur umum yang belum dikhususkan atau yang nilainya berubah-ubah pada semesta pembicaraannya.

► **Contoh.** Bagian-bagian yang digarisbawahi pada contoh kalimat berikut adalah peubah. Pada umumnya peubah dilambangkan dengan huruf-huruf terakhir dari abjad seperti x , y , dan z .

(i) \underline{x} adalah bilangan asli

(ii) Manusia berbaju merah

(iii) Bentuk umum fungsi linier adalah $\underline{y} = a\underline{x} + b$

Secara garis besar, kuantor dibedakan ke dalam dua jenis, yaitu kuantor universal dan kuantor eksistensial.

► **Definisi 8. Kuantor universal**, dinotasikan dengan \forall , adalah sebuah frasa “untuk semua”.

► **Contoh**

1. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$. Penulisan dengan simbol kuantor : $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 \geq 0)$.

Perhatikan bahwa penggunaan tanda kurung dimaksudkan untuk menandai bagian yang dikuantifikasi.

2. Untuk setiap bilangan rasional x dan y , hasil kali xy dan jumlahan $x + y$ adalah rasional. Penulisan dengan simbol kuantor:

$\forall x \in \mathbb{Q} \forall y \in \mathbb{Q}, (xy \in \mathbb{Q} \text{ and } x + y \in \mathbb{Q})$ atau $\forall x, y \in \mathbb{Q},$

$(xy \in \mathbb{Q} \text{ and } x + y \in \mathbb{Q})$

Selanjutnya untuk kuantor eksistensial dijelaskan sebagai berikut.

► **Definisi 9 Kuantor eksistensial**, dinotasikan dengan \exists , adalah sebuah frasa “terdapat” atau “beberapa” atau “ada”.

► **Contoh**

1. Terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $x^2 = 4$. Catatan: kata “terdapat” bukan berarti “hanya ada satu”.

2. Terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $x^2 = 5$ ”.

3. “ $\exists x \in \mathbb{Z}(x^2 - 4x + 3 = 0)$ ”. Dibaca: terdapat suatu bilangan bulat x sehingga $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Dengan demikian, bagaimana negasi dari kuantor itu? Perhatikan penjelasan berikut.

► Jika kita ingin menegaskan suatu pernyataan p yang berkuantor, maka ubah setiap \forall ke \exists dan setiap \exists ke \forall , dan juga gantilah p dengan negasinya.

► $\sim\{\forall(x), p(x)\} \equiv \{\exists(x)\}\{\sim p(x)\}$

► $\sim\{\exists(x), p(x)\} \equiv \{\forall(x)\}\{\sim p(x)\}$

4. Kevalidan Argumen dan Kaidah Penarikan Kesimpulan

Sebelum lebih jauh membahas penarikan kesimpulan, kita akan belajar terlebih dahulu mengenai premis dan konklusi.

- ▶ Premis adalah pernyataan-pernyataan yang diketahui yang akan ditarik kesimpulannya.
- ▶ Konklusi adalah kesimpulan dari beberapa pernyataan.
- ▶ Argumentasi adalah penarikan kesimpulan.
- ▶ Penarikan kesimpulan dikatakan **sah** atau **valid** bila konjungsi dari premis-premis berimplikasi dengan konklusi (kesimpulan) atau merupakan **tautologi**.

Selanjutnya kriteria apa saja yang diperlukan agar suatu argumen dikatakan valid dan bagaimana kriteria validitas itu sendiri?

- ▶ Ketika suatu argumen dikatakan valid, kebenaran dari premisnya menjamin kebenaran kesimpulannya.
- ▶ Suatu argumen dikatakan valid jika tidak mungkin semua premisnya bernilai benar namun kesimpulannya salah.
- ▶ Validitas tidak bergantung kepada kumpulan fakta-fakta.
- ▶ Validitas tidak bergantung kepada hukum-hukum alam.
- ▶ Validitas tidak bergantung kepada makna dari ekspresi personal yang spesifik.
- ▶ Validitas bergantung secara alami terhadap bentuk dari argumen.

Berikut diberikan contoh argumen yang valid dan tidak valid.

➤ Contoh Argumen yang Tidak Valid

- Zeno adalah seekor kura-kura.
- Oleh karena itu, Zeno ompong.

Catatan: kebenaran premisnya tidak menyediakan jaminan yang kuat untuk kebenaran kesimpulannya.

➤ Contoh Argumen yang Valid

- Zeno adalah seekor kura-kura.
- Semua kura-kura ompong.
- Oleh karena itu, Zeno ompong.

Kemudian bagaimana struktur penulisan argumen itu? Berikut akan diberikan salah satu cara menuliskan premis-premis beserta kesimpulannya.

Bentuk argumen:

Premis 1

Premis 2

•

•
•

Premis n

Oleh karena itu, **Simpulan (Konklusi)**

Terdapat tiga jenis penarikan kesimpulan yang sering digunakan. Ketiga jenis penarikan kesimpulan itu adalah sebagai berikut.

1. Modus Ponens

Modus Ponens merupakan suatu kaidah penarikan kesimpulan dengan premis 1 menyatakan $p \rightarrow q$ dan premis 2 menyatakan p sehingga diperoleh kesimpulan pernyataan q .

2. Modus Tollens

Modus Tonens merupakan suatu kaidah penarikan kesimpulan dengan premis 1 menyatakan $p \rightarrow q$ dan premis 2 menyatakan $\sim q$ sehingga diperoleh kesimpulan pernyataan $\sim p$.

3. Silogisme

Silogisme merupakan suatu kaidah penarikan kesimpulan dengan premis 1 menyatakan $p \rightarrow q$ dan premis 2 menyatakan $q \rightarrow r$ sehingga diperoleh kesimpulan pernyataan $p \rightarrow r$.